FUNCIONES RACIONALES EN LA SECUNDARIA: PRIMEROS RESULTADOS DE UNA ACTIVIDAD DE ESTUDIO Y DE INVESTIGACIÓN (AEI)

Gazzola, María Paz[1]; Llanos, Viviana Carolina[1,2]; Otero, María Rita[1,2]
[1]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil, Argentina.
[2]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
mpgazzola@gmail.com; rotero@exa.unicen.edu.ar , vcllanos@exa.unicen.edu.ar

Resumen
En este trabajo presentamos el diseño y los resultados de la implementación de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI) para estudiar las Funciones Racionales con alumnos de 5[to] Año de la Secundaria. Se adoptan como referenciales teóricos la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard y la Teoría de Juego de Marcos de Régine Douady. Se presentan algunos protocolos de los estudiantes y se discuten algunos alcances y limitaciones de este dispositivo.

Palabras clave: Actividad de Estudio y de Investigación (AEI); Funciones Racionales; Escuela Secundaria.

1. Introducción

Este trabajo es parte de la investigación que están desarrollando Llanos y Otero (2010). En su trabajo proponen el diseño de un REI que parte de la cuestión generatriz *Q*: ¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes? Las posibles respuestas a la cuestión *Q* involucran la tecnología del cálculo geométrico y generaron diferentes AEI, como parte del REI. Si se trata de la multiplicación de dos rectas, se genera una AEI_1 que permite reconstruir la Organización Matemática Local (OML_{FPD}) relativa a la función polinómica de segundo grado en el marco geométrico, geométrico analítico y algebraico funcional (Llanos, Otero, 2010). Si se trata de varias rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, etc., se construye una AEI_2 que permite reconstruir la OML_{FP} de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales. (Bilbao 2011, Llanos, Otero, Bilbao, 2011). Por último, si se trata de la división de rectas, o de rectas y parábolas, o parábolas y rectas, o entre parábolas, se construye una AEI_3, que permitiría construir la OML_{FQ} de las funciones racionales. Aquí abordamos el diseño de la AEI_3 propuesto para estudiar las funciones racionales en la escuela secundaria desde la *pedagogía de la investigación*.
La cuestión generatriz, se inspira en un problema propuesto en la investigación de Régine Douady (1986, 1999, 2010, 2011) para el estudio de los signos de las funciones polinómicas, a partir del análisis de los signos del producto de dos funciones lineales $f(x)=ax+b,\ a\neq 0$, cuando solo se conocen las representaciones gráficas de las rectas. En este trabajo, partimos del cociente de polinomios mediante el cálculo geométrico, cuando solo se conoce la representación gráfica y la unidad en los ejes, solicitando además obtener una gráfica razonable para la curva resultante. El análisis de los signos es una información más, entre las características que se requieren para la obtención de la curva razonable. La situación creada por Douady (1999) y la cuestión generatriz que hemos propuesto, poseen una gran generatividad, por la variedad de sub-cuestiones

matemáticas relevantes que el profesor y los estudiantes pueden plantear. La AEI_3 que presentamos aquí, está conformada por un conjunto de 7 situaciones, por una síntesis, ejercicios y problemas y por los controles habituales que incluyen la evaluación escolar (Llanos, Otero, 2010).

2. Marco teórico

Nuestro trabajo adopta los aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2004, 2007), que ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela media y ha propuesto las *Actividades de Estudio y de Investigación* (AEI) (Chevallard 2004) como dispositivos didácticos para enfrentar estos problemas e instalar algunos elementos de la pedagogía del cuestionamiento del mundo.
También se utilizan algunas nociones de la Teoría de los Juegos de Marcos de Régine Douady (1986, 1999, 2011), tanto para el diseño como para el análisis del significado de un mismo concepto en diferentes marcos. Se considera además, la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud (1990, 2009), ya que nos interesa analizar el aprendizaje de los estudiantes, la actividad y la conceptualización, aunque, por una cuestión de espacio, no será desarrollado en el trabajo aquí presentado.

3. Metodología

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Se busca describir y justificar si la AEI diseñada e implementada permite construir las propiedades fundamentales de las funciones racionales con sentido para los estudiantes. El objetivo es examinar cómo funciona este dispositivo en un aula concreta de secundario al mismo tiempo que se busca desplazar la enseñanza tradicional, puesto que hay pocas investigaciones donde las AEI se implementan sin la creación de cursos alternativos a los habituales. Las implementaciones fueron realizadas en dos cursos seleccionados intencionalmente por el equipo de investigación en el mismo Establecimiento Educativo. Los alumnos (N=59) son estudiantes de 5to Año de la Secundaria y las implementaciones fueron realizadas por los investigadores. Durante las implementaciones, se obtuvieron los protocolos escritos de los estudiantes en todas las clases, se tomaron registros de audio "generales" de la clase y también se registraron notas de campo. Los protocolos escritos de los estudiantes, se retiran clase a clase, se escanean y se devuelven a los estudiantes en la clase inmediata siguiente, para garantizar la continuidad de su trabajo y para que ellos dispongan permanentemente de sus registros.

4. Características de la AEI_3

La AEI_3 comienza en el marco geométrico, al igual que las AEI que la preceden (AEI_1 y AEI_2), pero a diferencia de ellas, la AEI_3 parte del cociente de funciones polinómicas. Las dos primeras situaciones son variantes del problema: ¿cómo dividir geométricamente dos curvas? En la situación 1 la gráfica de q resulta de la división geométrica de dos rectas mientras que en la situación 2 entre una recta y una parábola. En ambos casos se busca la gráfica más razonable de la función racional a partir de las siguientes preguntas: *¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q? ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?* En la figura 1 se presentan las gráficas de las situaciones 1 y 2.

Figura 1: Gráficas correspondientes a las situaciones 1 y 2.

Los estudiantes obtienen la curva más razonable para la función racional q identificando los *puntos seguros* de q (los ceros, los unos, los menos unos) y los signos de q, que son determinados por las funciones que se están dividiendo. Es posible obtener otros *puntos seguros* a través de la construcción geométrica que se retoma de las dos AEI anteriores, construyendo triángulos semejantes y utilizando como dato la unidad en los ejes. Entre las características de la gráfica de q, resulta interesante analizar el caso de la división por cero, dado que en las AEI_1 y AEI_2 que preceden a esta implementación, este aspecto no ha sido considerado porque tratan de la multiplicación de funciones polinómicas, no del cociente como ocurre en este caso. Se pone énfasis entonces en la identificación de los puntos donde la función divisor se hace cero y se analiza el posible comportamiento de la gráfica razonable para q en los puntos próximos al "cero del denominador", debido a que en este punto no se puede obtener la gráfica de q.
Con las situaciones 3 y 4 se obtiene la expresión algebraica de las funciones racionales q. Aquí se retoman los gráficos utilizados en las situaciones 1 y 2, pero se agrega la información de los valores en los ejes y además se indican algunos puntos pertenecientes a los gráficos de las funciones representadas gráficamente. Los estudiantes obtienen las expresiones algebraicas de las funciones polinómicas representadas gráficamente, y como consecuencia la expresión algebraica de q. En la figura 2 se presentan las gráficas de las situaciones 3 y 4. Estas situaciones permiten ingresar al marco algebraico-funcional.

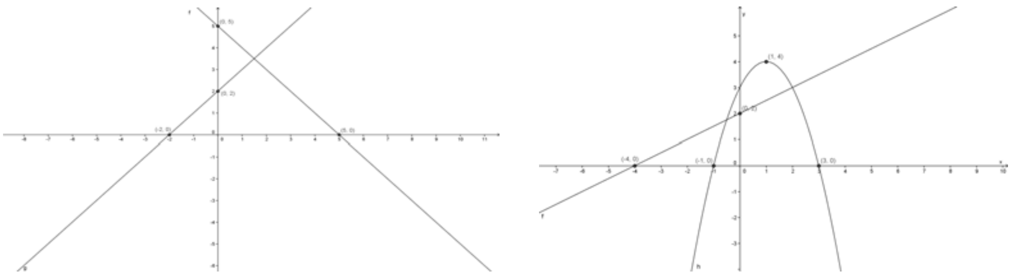

Figura 2: Gráficas correspondientes a las situaciones 3 y 4

La situación 5 permite estudiar la simplificación de las funciones racionales y retomar también el problema de los ceros. En esta situación se solicita obtener la curva más razonable y la expresión de la función racional que resulta de la división de una parábola por una recta, funciones que tienen un cero en común. Además se retoma el problema: *Las situaciones 1 a 4 parecían sostener la conjetura: "los ceros de la función del numerador son los ceros de la función racional" ¿Es V o F que los ceros de h son también los ceros de q?* En esta situación, los estudiantes indican que operando dentro del dominio natural de las funciones racionales, sus expresiones pueden simplificarse y así trabajar con expresiones más simples. Además analizar que, cuando las funciones que se dividen comparten un cero, este punto resulta un punto de discontinuidad de q. Se retoma de esta forma el caso de los ceros y de las asíntotas abordadas en las situaciones anteriores para concluir que en realidad en este caso se trata de un punto donde la función q no está definida.

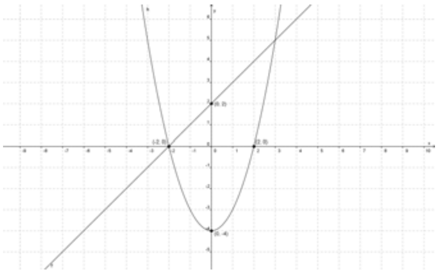

Figura 3: Gráfica correspondiente a la situación 5

La situación 6 tiene por objetivo retomar los casos de las funciones racionales correspondientes a las situaciones 3, 4 y 5 para poder identificar en que casos corresponde identificar asíntotas y cuando puntos de discontinuidad, analizando también las características de la representación gráfica de las funciones racionales en cada caso. Con la situación 7 se espera que obtengan técnicas para realizar operaciones con funciones racionales. Se solicita a los estudiantes elaborar una técnica para realizar la suma, resta, multiplicación y división de funciones racionales.
Al finalizar con todas las situaciones y las tareas que, si bien no se describieron en este trabajo forman parte de la AEI_3, se propone una síntesis que permite retomar todos los aspectos y las características abordados en la AEI para el estudio de las funciones racionales. Las nociones involucradas en esta síntesis son: ceros de la función racional, asíntotas verticales y horizontales, representación gráfica, simplificación, suma y resta, producto y cociente, ecuaciones racionales.

5. La OM efectivamente reconstruida en el aula.

Las situaciones 1 y 2 se desarrollan en el marco geométrico, y se solicita en ambas obtener la curva que resulta de la división geométrica de dos rectas y de una recta por una parábola. Los estudiantes grafican la curva más razonable para q a través de la identificación de los *puntos seguros* y los signos de q y la construcción geométrica a partir de los triángulos semejantes utilizando la unidad como información. Del análisis de los protocolos se puede interpretar que los alumnos realizan en primera instancia la búsqueda de los *puntos seguros* y de los signos de q, además de la identificación de la o las asíntotas verticales, la cual marcan con una recta. Para realizar la representación gráfica de q, realizan varias veces la construcción geométrica dado que los *puntos seguros* no son suficientes para analizar el comportamiento de la curva. Los protocolos de los alumnos A24 y A26 permiten interpretar como los estudiantes obtienen la representación gráfica de *q,* identificando *puntos seguros*, asíntotas y realizando la construcción geométrica para la obtención de *nuevos puntos seguros*. El alumno A24 además caracteriza a esta asíntota con un signo de pregunta, pues sabe que por ese punto no pasa la gráfica de q pero aún no puede establecer bien qué significa.

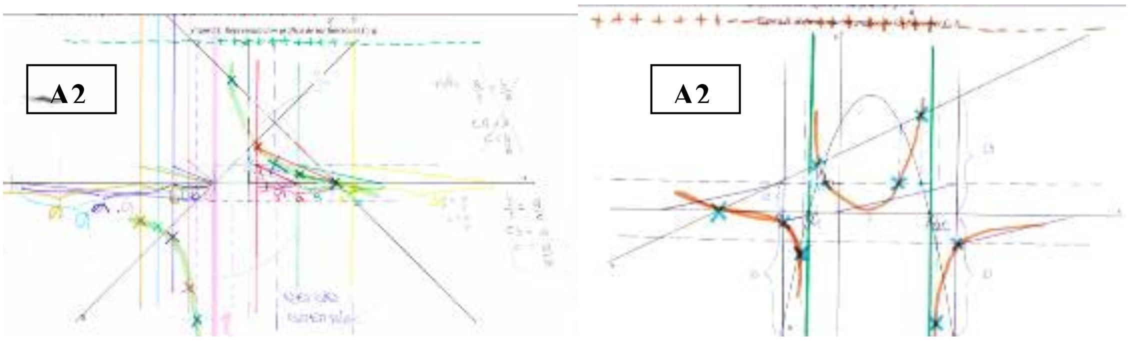

Figura 4: resolución de los alumnos A24 y A26 respectivamente

Cuando se ingresa al marco algebraico-funcional, en las situaciones 3 y 4 para encontrar las expresiones algebraicas de las funciones racionales, los estudiantes primero intentan utilizar el algoritmo de la división. Luego, esto es desestimado por ellos mismos en la situación 4 cuando tienen que realizar el cociente de una recta por una parábola y deciden que a lo sumo pueden obtener las expresiones de los polinomios r y s y expresarlos como $q = \frac{r}{s}$. Esto se puede observar en los protocolos de los alumnos A3 y A15 de la figura 5.

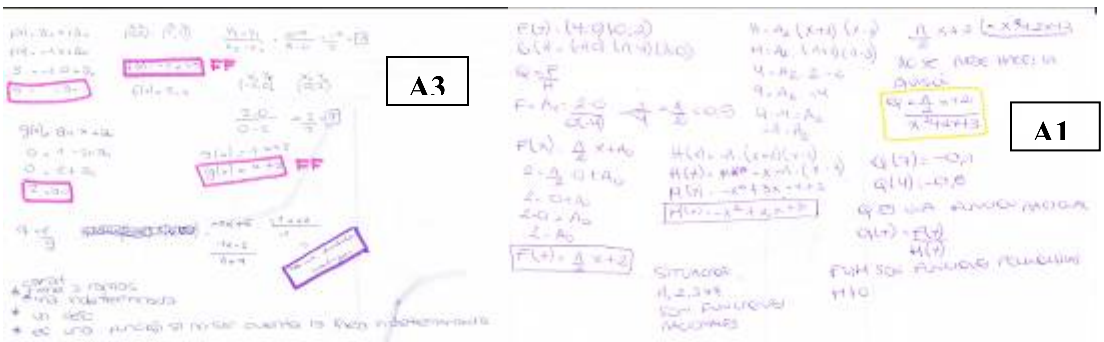

Figura 5: Protocolos de los estudiantes A15 y A05 respectivamente

En la situación 5 los estudiantes no presentaron inconvenientes en simplificar la función racional y en graficarla. A partir del gráfico, se logra determinar el dominio de la función, aun cuando esta se simplifica. La figura 6 permite interpretar lo descrito anteriormente, a partir del protocolo A20.

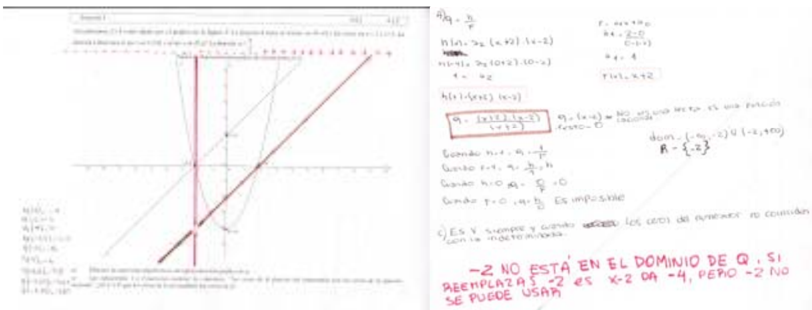

Figura 6: resolución del alumno A20

En la situación 7, los estudiantes tienen que proponer las técnicas para realizar las cuatro operaciones básicas con funciones racionales. No tuvieron inconvenientes en construir, explicar y justificar técnicas para realizar la multiplicación y división entre funciones racionales, y para proponer técnicas para la suma y la resta, lo hicieron mediante la comparación con las operaciones con fracciones. Fue necesario construir en conjunto con el profesor una técnica para encontrar el múltiplo común menor (m.c.m) entre los denominadores, necesario para realizar la suma y la resta de funciones racionales. Un ejemplo de estos resultados se muestra en la figura 7.

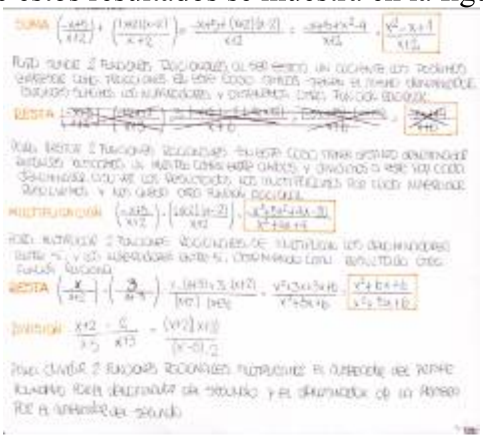

Figura 7: resolución del alumno A28

Conclusiones

Las implementaciones realizadas en los dos cursos de 5to Año de la escuela secundaria, muestran algunos resultados auspiciosos, pues no solo permiten recuperar algunas técnicas construidas en las AEI precedentes y adaptarlas a las nuevas situaciones, sino también obtener otras que permiten completar la OM relativa a las funciones racionales. Al momento, la AEI$_3$ permitió:

- En el marco geométrico-gráfico, obtener la gráfica de q utilizando la técnica del cálculo geométrico, identificando los puntos notables, los signos y analizando lo que ocurre en los puntos próximos a las asíntotas tanto verticales como horizontales.
- Con relación al marco algebraico- funcional, obtener las expresiones para q por cálculo algebraico del cociente de polinomios. Esto, no presentó problemas a los estudiantes ya que obtienen la expresión algebraica de las funciones polinómicas representadas gráficamente, y como consecuencia la expresión de q.
- Dentro del mismo marco, retomar el análisis de las asíntotas, ceros y puntos de discontinuidad según corresponda, lo que permitió no sólo obtener las ecuaciones de las asíntotas e identificar los puntos de discontinuidad analizando los casos posibles de simplificación, sino también reinterpretar los resultados obtenidos en el marco geométrico-gráfico
- Estudiar las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división con funciones racionales. También dentro del marco algebraico-funcional, los alumnos no tuvieron dificultades en construir, explicar y justificar una técnica para realizar la multiplicación y división entre funciones racionales, aunque les resulto más "complicado" proponer una técnica para la suma y la resta. Esta dificultad podría solucionarse buscando una mayor integración entre los marcos geométrico-gráfico, funcional y algebraico, que permita a los estudiantes dar sentido geométrico a las operaciones con funciones racionales.

Los resultados obtenidos en la AEI_3 han permitido construir una OML para las funciones racionales, aunque no hubiera sido posible alcanzar estos resultados si los estudiantes no hubieran realizado el recorrido por las AEI precedentes.
Si bien la AEI sólo permitió construir Organizaciones Matemáticas Locales, se considera que esto es importante en la recuperación del sentido. La implementación de esta AEI es una forma imperfecta aunque viable de introducir en la escuela la pedagogía de la investigación, que exige un cuestionamiento fuerte al contrato didáctico tradicional de la secundaria.

Referencias

Bilbao, M. P. (2011) Actividades de Estudio e Investigación (AEI) para la Enseñanza de nociones relativas a las Funciones Polinómicas en la Escuela Secundaria, Tesis de Licenciatura en Educación Matemática UNCPBA.
Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, pp. 221-266.
Chevallard, Y. (2004) *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr
Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8
Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5- 32
Douady, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)*. European Research in Mathematics Education I: Group 1. pp. 113-124
Douady, R. (2010) Communication personnel avec Maria Rita Otero, Paris, 01-02-2010.
Douady, R. (2011) Communication personnelle avec Maria Rita Otero, Paris, 01-06-2011.
Douady, R. (2011) Géométrie, graphiques, fonctions au collège. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). Año 6 nº1, pp. 1-7. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.
Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2010) Evaluar y calificar: algunas reflexiones en torno a las actividades de estudio e investigación (AEI). Actas II Congreso Internacional de Didácticas Específicas. UNSAM. Actas en prensa.
Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Bilbao, M. P. (2011). *Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Año 6 nº1, pp. 102-112. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.
Vergnaud. G. (1990). *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.
Vergnaud, G; et. Al (2009). A aprendizagen MATEMÁTICA na perspectiva da Teoría dos Campos Conceituais. Editora CRV, 2009. ISBN 978-85-62480-28-7